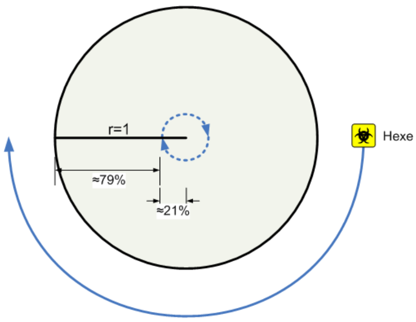
Die Prinzessin und die Hexe

Eine hübsche Prinzessin befindet sich in der Mitte eines kreisförmigen Sees. Außerhalb des Sees wartet eine gefährliche Hexe auf sie. Die Prinzessin muss es schaffen, aus dem Wasser zu kommen, ohne dass die Hexe sie fangen kann. Das Problem: Die Hexe kann 4-mal so schnell laufen, als die Prinzessin schwimmen kann. Die Hexe bemüht sich natürlich, immer möglichst dicht an der Prinzessin dran zu bleiben.

Die vorgeschlagene Lösung lautet:
Um die Rechnungen zu vereinfachen, wird zunächst der Kreisradius des Sees auf 1 gesetzt. Mit der Überlegung, wie weit die Prinzessin höchstens zum Ufer zu schwimmen haben darf, wenn die Hexe am gegenüberliegenden Seeufer losläuft, kommt man zu $\pi/4$. Die Prinzessin müsste also von der Mitte aus rund 22% ($1 - \pi/4 = 0{,}2146$) der Strecke zum Ufer bereits zurückgelegt haben, während die Hexe immer noch am gegenüberliegenden Ende ist.

Und das geht sogar wirklich, wenn die Prinzessin nämlich diese 22% zurücklegt und dann Kreise um den Mittelpunkt schwimmt, hat sie eine etwas höhere Winkelgeschwindigkeit als die Hexe. Sie kann also so lange schwimmen, bis sie die Hexe um eine halbe Runde abgehängt hat und dann geradewegs aufs Ufer zusteuern.
Interessant ist nun, welche Strecke die Prinzessin bei dieser Methode schwimmen muss. Dazu folgende Überlegung:
Sobald die Prinzessin zum Ufer hin losschwimmt wird die Hexe auch starten, mit der Geschwindigkeit 4. In der Zeit, in der die Prinzessin 0,22% des Radius schwimmt wird die Hexe 0,88% vom Radius laufen.



halber Kreisumfang (r=1) = Pi,
4-mal so schnell → Pi / 4

Der Winkel, den sie dabei zurücklegt ist $\alpha = \frac{b}{r} = 0{,}88\,rad$
Sobald die Prinzessin 0,22r geschwommen ist biegt sie ab und bewegt sich weiter auf diesem Radius mit der Geschwindigkeit 1, aber mit höherer Winkelgeschwindigkeit: $\omega_P = \frac{v_P}{r_P} = \frac{1}{0{,}22} = 4{,}5454$

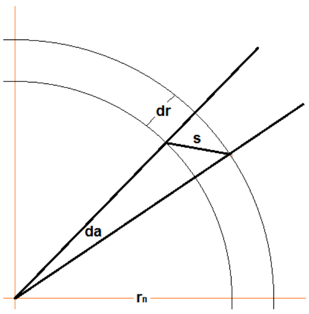
Die Hexe dagegen schafft nur: $\omega_H = \frac{v_H}{r_H} = \frac{4}{1} = 4{,}0000$

Wann befindet sich die Prinzessin und die Hexe 180° = π von der Hexe entfernt?

$$4\alpha = 4{,}5454\alpha - 4{,}5454 * 0{,}88$$
$$0{,}5454\alpha = 4$$
$$\alpha = 7{,}3333$$

Die Prinzessin muss also (7,3333-0,88)* 0,22 = 1,42r im Kreis und dazu 1r vom Mittelpunkt bis zum Ufer = 2,42r schwimmen.

Das funktioniert zwar, ist aber nicht sehr effektiv. Ich denke, die Prinzessin müsste so losschwimmen, dass der Seemittelpunkt immer zwischen ihr und der Hexe ist und sie aber versucht immer näher ans Ufer zu kommen. Da sie mit dem Radius = 0 beginnt hat sie kein Problem, die o.g. Winkelgeschwindigkeit, die die Hexe vorgibt, einzuhalten.
Welche Kurve muss die Prinzessin schwimmen? Dazu wieder eine Überlegung:



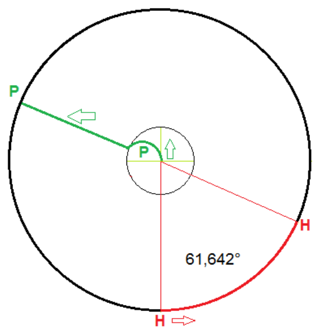
Der See habe jetzt den Radius 4. Dann ist die Strecke „s", die die Prinzessin in einer Zeiteinheit schwimmt = $d\alpha$ *4/4 = $d\alpha$, ferner ist der auf ihrem momentanen Radius r_n bezogene Weg $d\alpha * r_n$.

$$dr = \sqrt{(d\alpha)^2 - (d\alpha * r_n)^2} = d\alpha * \sqrt{1 - {r_n}^2}$$

$$\frac{dr}{d\alpha} = \sqrt{1 - r^2}$$

$$d\alpha = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \; ; \alpha = \int \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \arcsin r \quad ; \quad r = \sin \alpha$$

Das sieht zunächst verwirrend aus, aber nur, wenn man sich die Funktion in kartesischen Koordinaten vorstellt. Diese Funktion in Polarkoordinaten ergibt einen Kreis! Die Prinzessin schwimmt also wie gezeichnet:



Sie starten nach „Norden", die Hexe läuft zunächst nach Osten um den See. Sobald die Prinzessin den 22% des See-Radius erreicht hat, schwimmt sie geradewegs zum Ufer und hat gewonnen. Welchen Weg musste sie zurücklegen?

Das ist 0,88 vom Radius 1, der jetzt wieder eingeführt sei, und 123,284° auf dem Radius 0,25 – weil sie ja nur ¼ der Geschwindigkeit der Hexe schafft.
Das ist 0,25 * π * 123,284/360 + 0,78 = 1,049r.

Mit dieser Methode muss die Prinzessin weniger als die Hälfte der Strecke schwimmen.

Ich gebe zu, dass ich Manches nur vereinfacht dargestellt habe. Auch der Beweis, dass sinα in Polarkoordinaten dargestellt einen Kreis ergibt habe ich mir gespart – wem es Spaß macht kann sich ja mal daran versuchen.

24.11.2013 / Herby